Archimedes の牛の問題

1　問題

次は，Archimedes がエピグラム（詩の一種）の形で残した問題である．アレキサンドリアでこのような研究をしていた学生達に伝えるため，キレネの Eratosthenes に送った手紙にあったものである．

もし君が勤勉で賢いなら，見知らぬ人*よ，太陽神†の牛の数を求め給え．
昔々，シシリーの島々の中のトリナキア島の野に牛が草を食べていた．
毛色の異なる四つの群れに分かれ，
ひとつはミルクのような白色，もうひとつはつやつやの黒色，
３番目は黄色，最後のは斑色（まだらいろ）．
おのおのの群れでは牡（おす）が数で勝っていた．
見知らぬ人よ，よく聞いてくれ，その割合は次のよう．
白い牡牛は，黒い牡牛の二分の一と三分の一と黄色の牡牛を全部合わせたに等しく，
黒い牡牛は，斑色の牡牛の四分の一と五分の一と黄色の牡牛を全部合わせたに等しく，
斑色の牡牛は，白い牡牛の六分の一と七分の一とに黄色の牡牛を全部合わせたに等しい．
つぎに，牝（めす）については次のようになっていた．
白い牝牛は，黒の牛全部の三分の一と四分の一とにちょうど等しく，
黒い牝牛は，斑色の牝牛と斑色の牡牛全部が牧場に集まったときの，
その全体の四分の一と五分の一の等しかった．
斑色の牝牛は，黄色の牛全体の五分の一と六分の一とを合わせたのに等しかった．
そして，黄色の牝牛は，白い牛全部の六分の一と七分の一を合わせたのに等しかった．
見知らぬ人よ，太陽神の牛は何頭か，正確に言い給え，
よく肥えた牡牛の数を，また牝牛の数を，おのおのの色ごとに．
数について無知であるとか苦手だとかと言われたくはあるまいが，
この程度では，まだまだ知恵者の内に数えてもらえない．

太陽神の牛はさらに次の条件を満たしている．
白い牡牛と黒い牡牛を一緒にしたとき，
奥行きと幅が等しい長さで，広いトリナキアの野を
埋め尽くしてしまったという．
また，黄色の牡牛が斑色の牡牛がひとつに集まったときは，
その数が一から始まってひとつずつ増え
ちょうど三角の形に居並んだ，他の色の牡牛が加わることもなく，余ることもなしに．

おお，見知らぬ人よ，これらの条件を同時に満たす答えを発見できるなら，
君は栄光への道に出発し，
そしてこの種の知恵にかけて完璧であると皆に知れ渡るであろう．

この問題は 22 個のエレジーの組として書かれていたが，それは近代になって，ドイツの批評家兼劇作家の G.E.Lessing により発見された．そのとき彼はドイツ北部のボルヘンビュッテルの図書館の司書であっ

*英語では stranger となっている．会ったことのない学生への呼びかけと思われるが適切な訳語が見当たらない．
†太陽の運行を司る，ギリシャ神話の神ヘリオスのこと．毎日朝が訪れると，四頭立ての炎の馬車に乗り天空へと駆け上がり，地上に光を与えると夕方には西の海へと沈む．

た．1773 年に彼は注釈付きでこの問題を出版した．注釈には解答も書かれていたが，その解答は誤りであった．

2　式で書く

このArchimedesの牛の問題は驚くほど難しく，100年少し前にAmthorにより初めて解かれた．単純に見える問題，そしてその解答の困難さは，これが「挑戦する課題」としてとても優れた例であることを意味する．しかし整数論のなかった時代の学生への出題としては，常軌を逸して難しい．2次体の整数論もなく，そしてコンピュータもなかった時代，Archimedes本人にも解答不能であったと思う．ただ，この問題が解を持ちさらに，数学的な意味での何らかの大鉱脈につながることは気づいていたとは思われ，その点まさしく天才Archimedesである．

天才ではあるが，教育者としてはこの出題はまずいであろう．アレキサンドリアの学生達のなかに数学のやる気を失うものが出なかったのを祈るばかりである‡．ただ，アレキサンドリアの学生達の名を借りて，後生の学生達へ出題と見ることにする．すると今度は，時代を超えた素晴らしい教育者となると思う．

問 1 解が5桁以上の数になる方程式をテストで出題する先生をどう思うか，正直に述べよ．

出題を数式に直すと次の通りである．

$$\begin{aligned} W &= \text{白い牡牛の数}, & w &= \text{白い牝牛の数}, \\ X &= \text{黒い牡牛の数}, & x &= \text{黒い牝牛の数}, \\ Y &= \text{黄色い牡牛の数}, & y &= \text{黄色い牝牛の数}, \\ Z &= \text{斑の牡牛の数}, & z &= \text{斑の牝牛の数} \end{aligned}$$

とおくと，

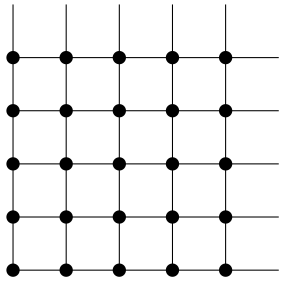
$$\begin{cases} W = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)X+Y, \quad X = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)Z+Y, \quad Z = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)W+Y, \\ w = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(X+x), \quad x = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(Z+z), \quad y = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(W+w), \\ z = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(Y+y) \end{cases} \tag{1}$$

であり§，さらに「おのおのの群れでは牡が数で勝っていた」ことより

$$W > w, \quad X > x, \quad Y > y, \quad Z > z \tag{2}$$

である¶．

知恵者の仲間に入れてもらうために追加された条件も考慮する．ちょっと準備がいる．**平方数**とはある0以上の整数 n に対し n^2 で表される数を意味する．



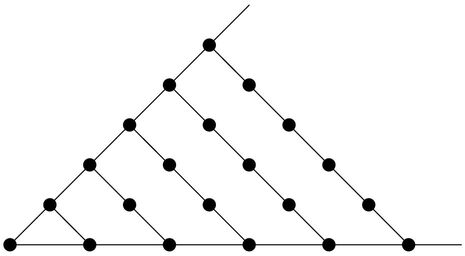
‡少し遅すぎるかもしれないけれど．

§詩の形で出題するだけあって，係数が韻を踏んでいることに注意．

¶実はこの条件は (1) の自然数解に反してしまい，無視することにする．先達も皆無視している．

平方数 n^2 は点を縦に n 個，横に n 個正方形上に並べたときの点の個数である．平方数は $0,1,4,9,16,25,\cdots$ といった数である．

正方形を３角形に変えて同様にして**３角数**を定義する．



図のように３角形上に点を並べたとき，横に n 個の点が並んだとき，対応する３角形の点の個数は $\frac{1}{2}n(n+1)$ である．この形の数を３角数という．３角数は $0,1,3,6,10,15,\cdots$ といった数である．

問 2 ３角数が $\frac{1}{2}n(n+1)$ と書けることを示せ．

白い牡牛と黒い牡牛が「奥行きと幅が等しい長さ」で並ぶと言うことは，正方形に並ぶということである[‖]．また，黄色の牡牛が斑色の牡牛は「一から始まってひとつずつ増えちょうど三角の形に居並んだ」ということである．式で書くと，これらは

$$W+X=\text{平方数} \tag{3}$$

$$Y+Z=\text{ 3 角数} \tag{4}$$

を意味する．

3 同次連立１次方程式

今，変数 x,y,z 等は (1) のものとは無関係であるとする．定数項が 0 の連立１次方程式を，**同次連立１次方程式**という．例えば

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ 3x-4y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \tag{5}$$

のような連立一次方程式である．このような方程式は $(x,y,z)=(0,0,0)$ を解のひとつとする[**]．この $(0,0,0)$ という解は同次連立１次方程式の**自明な解**と言われる．(5) を実際解いてみると，この連立方程式は自明な解しか持たないことが分かる．

次に同次連立１次方程式

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ 3x-4y-z=0 \end{cases} \tag{6}$$

を考える．この方程式は未知数の個数が方程式の個数より多い．**このような同次連立１次方程式は自明でない解を必ず持つ．**自明でない解を $(x,y,z)=(\alpha,\beta,\gamma)$ としたとき，勝手な定数 c に対し $(x,y,z)=(c\alpha,c\beta,c\gamma)$ も解となる．特に解は無数にあることになる．

‖気になるのは "広いトリナキアの野を埋め尽くして" 正方形に並ぶというところである．このとき他の牛はどこに行ってるのだろう？こんなことで，牛全部がトリナキアの野で草を食べるなんて可能なのか？ Archimedes が今生きてるなら是非聞いてみたいところである．

**$x=0,y=0,z=0$ と書くのが通常と思われるが，このような書き方もする．

連立方程式 (6) は次のように解ける．

$$\begin{cases} 3x+2y=-2z \\ 3x-4y=z \end{cases}$$

として，z が定数であるような振りをする．x,y の連立方程式とみなして解いて

$$x=-\frac{1}{3}z,\ \ y=-\frac{1}{2}z$$

である．これより

$$(x,y,z)=(\frac{1}{3}c,\frac{1}{2}c,-c) \qquad (c \text{ は定数 }) \tag{7}$$

が解となる．

方程式の整数解が必要となることがある．今の Archimedes の牛の問題のような場合である．解 (7) が整数解であるためには，c が 6 の倍数であることが必要十分条件である．$c=6n$ とおいて

$$(x,y,z)=(2n,3n,-6n) \qquad (n \text{ は整数 })$$

が，同次一次方程式 (6) の整数解となる．

問 3 $\begin{cases} W=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)X+Y \\ X=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)Z+Y \\ Z=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)W+Y \end{cases}$ の整数解を求めよ.（ヒント：$(W,X,Y,Z)=(2226n,?,?,?)$ となる.）

Archimedes の牛の問題に戻る．同次連立 1 次方程式 (1) は未知数が 8 個，方程式が 7 個である．よって自明でない解を持つ．特に整数解は無限にある．実は Archimedes の牛の問題自体が無数の整数解を持つ問題である．変数の個数が多いものの頑張れば，(6) と同様にして解ける．実は頑張らなくても，今の時代は，コンピュータが計算してくれる[††].

$$\begin{aligned}&(W,X,Y,Z,w,x,y,z)\\ =&(10366482n,7460514n,4149387n,7358060n,7206360n,4893246n,5439213n,3515820n)\end{aligned} \tag{8}$$

が解である．ここで各変数の値は牛の頭数であり正でなければいけないことから

$$n \text{ は自然数，すなわち } n=1,2,3,\cdots$$

である．$Y<y$ となってるため，このとき条件 (2) は満たされない． (1) の解であることと (2) は矛盾してしまうのである．そこでこの条件は無視することにする．

(8) で $n=1$ としてみる．これが同次連立 1 次方程式 (1) の最小自然数解を与える．このとき既に牛の全頭数は 45389082 となり，日本の人口の三分の一を軽く超える数となっている．太陽神の牛のいたトリナキア島は架空の地名であるが，ギリシャ語で言う Sikelia（シケリア島），いわゆるシチリア島を指すと言われている．その面積は $25710km^2$ で，三重県の 4.5 倍程度の広さである．

[††]コンピュータがあるから勉強しなくてよいということは全くない．例えば，そのプログラムを書くときに同次連立 1 次方程式の解法を理解していなければならない．

4　知恵者であるために

条件 (3),(4) も満たす自然数解を探す．これも含めて解かないと，知恵者の仲間に入れてもらえない．(8) より

$$\begin{aligned} W+X &= 10366482n+7460514n = 17826996n \\ &= 2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4657n \\ &= 2^2\cdot 4456749n \end{aligned}$$

である．(3) が成り立つ，すなわち $W+X$ が平方数である必要十分条件は，n がある整数 m に対して

$$n = 4456749m^2$$

を満たすことである．(8) に代入すると

$$\begin{aligned} &(W,X,Y,Z,w,x,y,z) \\ =&(46200808287018m^2, 33249638308986m^2, 18492776362863m^2, 32793026546940m^2, \\ &\quad 32116937723640m^2, 21807969217254m^2, 24241207098537m^2, 15669127269180m^2) \end{aligned} \tag{9}$$

である．これが連立 1 方程式 (1) および条件 (3) をともに満たす自然数解である．$m=1$ がその最小解を与えるが，このとき牛の全頭数は 224571490814418 となる．現在の地球上の総人口の 34500 倍ほどの数である．三重県の 4.5 倍程度の広さのトリナキア島に押し込むのは，かなり大変である．

(4) より $Y+Z$ は 3 角数である．3 角数は，自然数 q に対し $\frac{1}{2}q(q+1)$ と表せる数である．$Y+Z$ に (9) の数を代入し次を得る．

$$\begin{aligned} Y+Z &= 18492776362863m^2 + 32793026546940m^2 \\ &= 51285802909803m^2 = \frac{1}{2}q(q+1), \end{aligned}$$

この最後の部分を変形し

$$q^2+q-2\cdot 51285802909803m^2 = 0 \tag{10}$$

となる．この q の 2 次方程式が整数解を持つことと，$Y+Z$ が 3 角数であることは同値*である．この式が整数解を持つ条件は，判別式 $1+4\cdot 2\cdot 51285802909803m^2 = 1+410286423278424m^2$ が平方数であることが必要十分である．言い換えれば，ある整数 k に対し

$$1+410286423278424m^2 = k^2$$

を満たすことである．このとき k は奇数であり，$q=\frac{k-1}{2}$ が (10) の整数解となる．素因数分解すると $410286423278424 = 2^3 3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353\cdot 4657^2$ であるから $\ell = 2\cdot 4657m$ とおくと，この式は $1+2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353\ell^2 = k^2$，すなわち

$$k^2 - 4729494\ell^2 = 1 \tag{11}$$

と変形される．(11) のタイプの方程式は，整数解を求める目的で扱うとき Pell 方程式と言われる．Pell はイギリスの数学者の名前である．実は Pell は，Pell 方程式についての仕事は何もしてない．Euler が誤解してこの名を付けてしまい，その後定着してしまった．この Pell 方程式を最初に組織的に研究したのは，

*必要十分条件になっているふたつの条件を，**同値**という．

17 世紀の数学者 Fermat と言われている．しかし，紀元前 3 世紀（弥生時代前期†）の Archimedes は，少なくとも Pell 方程式に解があることは既に知っていたと思われる．

Archimedes の牛の問題を解くには，(11) の解のうち ℓ が $2\cdot 4657$ の倍数となるものを求め，それを $2\cdot 4657$ で割って得た整数 m を (9) に代入すればよいことになった．

5　2 次体

以下，割り算というとき 0 による割り算は考えないこととする．整数の集合を $\mathbf{Z}$ で表すことにする．$\mathbf{Z}$ のなかで加減乗の演算はできるが，割り算は一般にはできない．計算の結果が $\mathbf{Z}$ を外れてしまう．割り算は，逆数を掛けることと同じであるが，逆数が $\mathbf{Z}$ に入る整数は ± 1 だけである．

今 n を自然数で，その素因数分解に 2 乗以上で出てくる素数はないとする．例えば $10 = 2\cdot 5$ といったもので，$20 = 2^2 5, 27 = 3^3$ といったものではない，ということである‡．簡単のために n は偶数としておく§．

$$\mathcal{O}(\sqrt{n}) = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \text{ は整数 }\}$$

とおく．$\mathcal{O}(\sqrt{n})$ からふたつ数を持ってきて和と差を計算すると，再び $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ に入るのはすぐ分かる．

問 4 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ からふたつ数を持ってきたとき，その積が再び $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ に入ることを示せ．

$\mathcal{O}(\sqrt{n})$ では $\mathbf{Z}$ と同様，加減乗の演算ができる．これは $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ において整数論ができそうなことを示している．実際これは可能で，素数，素因数分解，合同式などの概念は $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ に拡張できる¶．そのときは $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ の数は整数となるわけだが，通常の整数と区別するため**代数的整数**という．$\sqrt[3]{2}, 2\cos\frac{2\pi}{13}$ なども代数的整数なのであるが，特に $\sqrt{n}$ を用いて作る代数的整数は，**2 次体の整数**と言われる‖．

$\mathcal{O}(\sqrt{n})$ と $\mathbf{Z}$ は加減乗ができるものとして，かなり共通点を持つ．当然であるが，違う点もある．ここで $n = 6$ としてみる．このとき $\mathcal{O}(\sqrt{6}) = \{a + b\sqrt{6} \mid a, b \text{ は整数 }\}$ である．$(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6}) = 1$，すなわち $(5+2\sqrt{6})^{-1} = 5-2\sqrt{6}$ で，これは $\mathcal{O}(\sqrt{6})$ に属す．このように $5+2\sqrt{6}$ は $\mathcal{O}(\sqrt{6})$ 内に逆数を持つ，言い換えれば $\mathcal{O}(\sqrt{6})$ 内で $5+2\sqrt{6}$ による割り算が出来る．このように $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 内に逆数を持つ $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ の数を**単数**という．$(5+2\sqrt{6})^j$ (j は整数) は $\mathcal{O}(\sqrt{6})$ ですべて単数となり，単数は無限に存在する．一方，$\mathbf{Z}$ の単数は ± 1 だけである．

$\mathcal{O}(\sqrt{n})$ には無限に多くの単数が存在する**．そのひとつを $k + \ell\sqrt{n}$ とする．この逆数は $\pm(k - \ell\sqrt{n})$ のどちらかである．もし，$k - \ell\sqrt{n}$ が逆数であるとすると

$$1 = (k + \ell\sqrt{n})(k - \ell\sqrt{n}) = k^2 - n\ell^2$$

である．ここで k, ℓ を未知数であるという目でこの式を眺めると，これは Pell 方程式に他ならない．$n = 4729494$ とすれば，これは (11) に一致する††．Pell 方程式 を解くことと 2 次体の整数の単数を求めることは，実は同じことである．単数については，次が基本的である．

2 次体の単数定理 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ には単数 ε が存在して，すべての単数は

$$\pm\varepsilon^j \quad (j \text{ は整数 })$$

---

†数学とは関係ないが，弥生時代中期は紀元前 1 世紀以降という区切り方に従っている．弥生時代の開始を 500 年程度さかのぼらせるべきという議論が現在行われている．それによれば，“前期” ではなくなるかもしれない．

‡こういう n は**平方因子を持たない**と言われる．

§奇数でも以下の議論はできる．しかし表記上場合分けが必要となり，その面倒を避けるためにこうする．

¶タダではできない．ちょっと苦労が必要となる．

‖現在 n は偶数の自然数となっているが，負の整数でも，奇数でもよい．ただ平方因子は持たないというのは，そのままである．

**$n < 0$ の場合の $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ は，単数の個数は有限である．

††同じと言い切るには，実は，Pell 方程式を $k^2 - n\ell^2 = \pm 1$, $k^2 - n\ell^2 = \pm 4$ の形まで拡張する必要があるのだが，今は必要でない．

の形で表すことが出来る．

定理の ε は**基本単数**と言われる．この基本単数を求められれば，これによりすべての基本単数が得られ，従って Pell 方程式のすべての解が求まることになる．

Lagrange は連分数を使って基本単数を求める計算法を開発した．連分数とは次のようなものである．例えば r を有理数でない実数としたとき，

$$\begin{aligned} r &= (r\text{ の整数部分}) + (0\text{ より大で }1\text{ より小の数}) = (r\text{ の整数部分}) + \frac{1}{(1\text{ より大の数})} \\ &= (r\text{ の整数部分}) + \frac{1}{\text{自然数} + (0\text{ より大で }1\text{ より小の数})} \\ &= (r\text{ の整数部分}) + \cfrac{1}{\text{自然数} + \cfrac{1}{(1\text{ より大の数})}} \end{aligned}$$

これを続けて，結局

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

と無限に展開される，ここで a_0 は整数，$a_1, a_2, \cdots$ は自然数である．この "分数" の部分を

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots \rangle$$

と書くことにする．n は自然数で，その素因数分解に 2 乗以上で出てくる素数はないものとする．このとき $\sqrt{n}$ を連分数に展開すると，同じ数字が循環する．例えば

$$\begin{aligned} \sqrt{6} &= 2 + \langle 2, 4, 2, 4, 2, 4, \cdots \rangle \\ \sqrt{14} &= 3 + \langle 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, \cdots \rangle \end{aligned}$$

である．Lagrange は，この循環の最後の項以降（最後の項を含む）を無視した有限の連分数の既約分数表示から，基本単数が得られることを示した．実際 $\sqrt{6}$ の連分数展開に対し

$$2 + \langle 2 \rangle = 2 + \frac{1}{2+0} = \frac{5}{2}$$

であるが，この分子 5，分母 2 を用いて作る

$$5 + 2\sqrt{6}$$

は $\mathcal{O}(\sqrt{6})$ の基本単数となる．また，$\sqrt{14}$ の連分数展開に対し

$$3 + \langle 1, 2, 1 \rangle = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+0}}} = \frac{15}{4}$$

の分母分子を用いて作る

$$15 + 4\sqrt{14}$$

は，$\mathcal{O}(\sqrt{14})$ の基本単数となる．

(11) の解を求めるためには，これを $n = 4729494$ で実行する必要がある．再びコンピュータを用いると，

$$\begin{aligned}\sqrt{4729494} =& 2174+ \\ & \langle 1,2,1,5,2,25,3,1,1,1,1,1,1,15,1,2,16,1,2,1,1,8,6,1,21,1,1,3,1,1,1,2,2,6,1,1,5,1,17, \\ & 1,1,47,3,1,1,6,1,1,3,47,1,1,17,1,5,1,1,6,2,2,1,1,1,3,1,1,21,1,6,8,1,1,2,1,16,2,1,15, \\ & 1,1,1,1,1,1,3,25,2,5,1,2,1,4348(\text{繰り返し})\rangle\end{aligned}$$

である．このとき，繰り返しの始まる 4348 より前の部分の連分数を計算すると，

$$\frac{10993198673282973497986623282143354390108804 9}{50549485234315033074477819735540408986340}$$

となる．従って

$$\begin{aligned}\varepsilon =& 109931986732829734979866232821433543901088049 \\ & + 50549485234315033074477819735540408986340\sqrt{4729494}\end{aligned} \tag{12}$$

が $\mathcal{O}(\sqrt{4729494})$ の基本単数となることが分かる．特に

$$k = 109931986732829734979866232821433543901088049,$$
$$\ell = 50549485234315033074477819735540408986340$$

が，(11) の最小の自然数解を与える[‡‡]．一般の解は，ε を j 乗して

$$\varepsilon^j = k_j + \ell_j\sqrt{4729494} \tag{13}$$

とおいたとき，k_j, ℓ_j がそれを与える．

ε の逆数 ε^{-1} は (12) において第 2 項の符号をマイナスにしたものである．一般に $\varepsilon^{-j} = k_j - \ell_j\sqrt{4729494}$ が分かる．これより，ℓ_j は ε で書くことが出来，

$$\ell_j = \frac{1}{2\sqrt{4729494}}(\varepsilon^j - \varepsilon^{-j})$$

となる．

6 知恵者になるのも楽じゃない

前節で (11) の自然数解はすべて求めることが出来た．第 4 節の最後に述べたように，この解のうち ℓ が $2\cdot 4657$ の倍数となるものを求める必要がある．しかし，ℓ は常に偶数である．これを示すには，既に第 4 節で述べたように，まず k が奇数であることに注意する．k が奇数であることから，$4729494\ell^2 = k^2 - 1$ の右辺は 4 の倍数であるが，4729494 は 2 で割れるだけで 4 の倍数ではない．よって ℓ は偶数である．従って ℓ は，4657 の倍数となるという条件を満たすだけで十分である．

ここで Fermat の小定理を 2 次体で使う必要が出てくる[*]のだが，そこの議論はここでは省くことにする[†]．(13) の ℓ_j が 4657 の倍数となる必要十分条件は j が $\frac{4657+1}{2} = 2329$ の倍数となることである．こ

[‡‡]Archimedes の時代，既に連分数は知られていた．実際に計算したか否かとは別に，このやり方を Archimedes が知っていたとしても，不思議はないと思われる．

[*]通常の Fermat の小定理は次のようなものである．素数 p と p と素な整数 a に対し $a^{p-1} - 1$ は p の倍数になるというものである．2 次体の場合，この $p-1$ 乗のところを $p^2 - 1$ 乗にする必要があるケースも出てくる．

[†]2 次体の整数論の知識を前提で一応の概略を述べる．Pell 方程式 (11) の解で ℓ が 4657 の倍数となるものに対応する単数は，単数全体の群の部分群を形成する．素数 4657 は $\mathcal{O}(\sqrt{4729494})$ まで惰性し $(\mathcal{O}(\sqrt{4729494})/4657)^\times$ は位数 $4657^2 - 1$ の巡回群となる．よって (12) の ε に対し ε^{4657^2-1} は部分群の元となる．部分群の生成元を探すのは，$4657^2 - 1$ の各約数 j に対し ε^j がその部分群に属すか調べればよい．やることは単純だが，なんと言っても数が大きいので，2 次体で合同式をうまく使う必要が出てくる．結果として，$j = (4567+1)/2$ が求める約数となる．

のとき，

$$m = \frac{1}{2\cdot 4657}\ell_{2329j} = \frac{1}{18628\sqrt{4729494}}(\varepsilon^{2329j} - \varepsilon^{-2329j})$$

であるから

$$m^2 = \frac{1}{1641145693113696}(\varepsilon^{4658j} + \varepsilon^{-4658j} - 2)$$

である．これを (9) に代入する．右辺はベクトルとして表示する．すなわちスカラー倍は，各々の成分に掛けるものとする．(12) の ε に対し

$$\begin{aligned}&(W, X, Y, Z, w, x, y, z)\\ =&(\varepsilon^{4658j} + \varepsilon^{-4658j} - 2)\left(\frac{159}{5648}, \frac{801}{39536}, \frac{891}{79072}, \frac{395}{19768}, \frac{128685}{6575684}, \frac{2446623}{184119152}, \frac{5439213}{368238304}, \frac{125565}{13151368}\right).\end{aligned}$$

これが最終的な答，太陽神の牛の頭数である．数字だけの式にして書きたいのだが，次の事情でそれはできない．

$j = 1$ のときが Archimedes の牛の問題の最小解となる．その最小解を考える．ε はかなり大きな数なので ε^{-1} はとても小さい．$\varepsilon^{4658} + \varepsilon^{-4658} - 2$ の大きさは ε^{4658} で評価される．

$$\log_{10}\varepsilon^{4568} = 4568\log_{10}\varepsilon = 206545.75\cdots$$

なので $\varepsilon^{4658} + \varepsilon^{-4658} - 2$ は 206546 桁の整数である．各々の色ごとに牡牛の数と牝牛の数をいうのが知恵者の仲間入りの条件であるが，それぞれが多くて 206545 桁，少なくて 206544 桁の整数である．ひとつひとつが印刷で 50 ページくらい，合わせて 400 ページくらい必要となる．最小解でさえ，印刷しても多分誰も読んでくれないであろう．そこで最小解の概数だけを述べることにする．それは

$$(W, X, Y, Z, w, x, y, z) \fallingdotseq 10^{206544}(1.60,\ 1.15,\ 0.64,\ 1.13\ ,1.11,\ 0.75,\ 0.84,\ 0.54)$$

となる．

Archimedes はもちろんコンピュータのことは知らなかった．以上の計算をすべて手計算でやることが知恵者の仲間入りの条件であるとすれば，少なくとも私はさっさと諦める．

なお全宇宙に存在する原子の個数は 10^{77} 程度と言われているそうである．太陽神の牛は最小解のときでさえ全頭数が約

$$7.76\times 10^{206544}$$

となる．第 3 節の最後にトリナキア島の大きさを三重県の 4.5 倍程度と見積もったが，どうもそれは間違いで訂正しないといけないらしい．トリナキア島は，全宇宙より大きい．

7 オマケ

第 4 節以降の議論を用いると，例えば次のような問題に解答できる．

問 牛の群れが，奥行きと幅が等しくも並べるし，その数が一から始まってひとつずつ増えちょうど三角の形にも居並ぶことができるとする．全部で何頭いるか．

平方数かつ 3 角数であるような自然数を求める問題である．以下解答を述べる．求める自然数を x とおくと

$$x = m^2, \tag{14}$$

$$x = \frac{1}{2}q(q+1) \tag{15}$$

を満たす自然数，m,q が存在する．(14),(15) より $m^2 = \frac{1}{2}q(q+1)$，すなわち

$$q^2+q-2m^2 = 0 \tag{16}$$

である．これを q についての方程式と見たとき，整数解を持つ条件は判別式が平方数であることである．言い換えれば，整数 k が存在して，$1+8m^2 = k^2$ を，すなわち

$$k^2-8m^2 = 1$$

を満たすことである．$\ell = 2m$ とおくと，これは

$$k^2-2\ell^2 = 1 \tag{17}$$

と変形される．$\sqrt{2}$ を連分数で書くと

$$\sqrt{2} = 1+\langle 2,2,2,\cdots\rangle.$$

第 5 節では，連分数の繰り返しの最後から以降を取り除いて有限の連分数から，単数を作ったが，今の場合それをやると連分数自体が部分が消えてしまう．こういうときは 2 項以降を取り除いて

$$1+\langle 2\rangle = 1+\frac{1}{2+0} = \frac{3}{2}$$

とする[‡]．この分母分子を用いて

$$\varepsilon = 3+2\sqrt{2} \tag{18}$$

を作ると，これが (17) に対応する $\mathcal{O}(\sqrt{2})$ の単数となる．特に $k=3$, $\ell=2$ が Pell 方程式 (17) の最小自然数解を与える．一般解は

$$k = \frac{1}{2}(\varepsilon^j+\varepsilon^{-j}),\quad \ell = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\varepsilon^j-\varepsilon^{-j})$$

で与えられる．(17) を満たす k は偶数ではあり得ない，もしそうなら左辺が偶数になってしまい 1 に等しいことはあり得なくなる．k は奇数である．再び (17) より $2\ell^2 = k^2-1$ であるが，この右辺は 4 の倍数である．よって ℓ は偶数である．$m = \frac{1}{2}\ell$ であったから，$m = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\varepsilon^j-\varepsilon^{-j})$ である．また q の方程式 (16) の自然数解は $q = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{\text{判別式}}) = \frac{1}{2}(k-1) = \frac{1}{4}(\varepsilon^j+\varepsilon^{-j}-2)$ となる．以上をまとめると，(14),(15) の解は，(18) の ε に対し

$$x = \frac{1}{32}(\varepsilon^{2j}+\varepsilon^{-2j}-2),\quad m = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\varepsilon^j-\varepsilon^{-j}),\quad q = \frac{1}{4}(\varepsilon^j+\varepsilon^{-j}-2) \qquad (j \text{ は自然数})$$

となる．Arichimedes の牛の問題と違い，最初のいくつかの解は数字だけで書いてみせることが出来る．

x	1	36	1225	41616	1413721	48024900	1631432881	55420693056	1882672131025
m	1	6	35	204	1189	6930	40391	235416	1372105
q	1	8	49	288	1681	9800	57121	332928	1940449

問 5 3 角数であり，かつ平方数の 3 倍でもあるような自然数を求めよ[§]．

[‡]その場しのぎのいい加減なことを言ってるように見えてしまうかもしれない．その場合は，連分数の解説の載ってる本を読んでいただくのがよいと思う．抽象代数学が大学の「代数学」のテーマになる前の時代は，連分数が大事なテーマだったとのことである．その重要性は失われていない．例えば自然対数の底 e は，$e = 2+ < 1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,\cdots >$ と規則的な展開を持つ．連分数が何かを教えたそうにしてる感じがする．これ以外にも教えてくれることをさまざま秘めていることだろう．

[§]$\mathcal{O}(\sqrt{6})$ の基本単数が必要となるが，既に第 5 節で求めてある．小さい方から 3 番目の自然数解は 29403，4 番目は 2881200 である．